

- Pihlström, Sami (2002b), "Pragmatismi ja looginen empirismi", teoksessa Ilkka Niiniluoto & Heikki J. Koskinen (toim.), *Wiener piiri*, Gaudeamus, Helsinki.
- Pihlström, Sami (2003), "On the Concept of Philosophical Anthropology", *Journal of Philosophical Research* 28, ilmestyy.
- Pihlström, Sami & Koskinen, Heikki J. (2001), "Philosophical and Empirical Knowledge in the Program of Naturalism", teoksessa Mika Kiikeri & Petri Ylikoski (toim.), *Explanatory Connections: Essays Dedicated to Matti Sintonen's 50<sup>th</sup> Birthday*, www.valt.helsinki.fi/kfil/matti.
- von Plato, Jan (2002), "Elämä ja teos - ajatuksia Oiva Ketosen tieteellisen saavutuksen johdosta", tässä niteessä.
- Sintonen, Matti (toim.) (1998), *Biologian filosofian näkökulmia*, Gaudeamus, Helsinki.
- Sleeper, R.W. (1986), *The Necessity of Pragmatism: John Dewey's Conception of Philosophy*, Yale University Press, New Haven & London.
- Stephan, Achim (1999), *Emergenz: Von der Unvorhersagbarkeit zur Selbstorganisation*, Dresden University Press, Dresden & München.
- Taylor, Mark C. & Saarinen, Esa (1994), *Imagologies: Media Philosophy*, Routledge, London & New York.

## Elämä ja teos - ajatuksia Oiva Ketosen tieteellisen saavutuksen johdosta

JAN VON PLATO

Voi olla, että useimpien yliopiston professorien tieteestä ei jää mitään pysyvää jäljelle. Tuollainen kolmenkymmenen vuoden ajanjakso on riittävä asian varmistamiseksi, paitsi yllätystapauksissa. Joillakin on onni keksiä yksi merkittävä asia, jota voi sitten toistaa eri muodoissa. Helsingin yliopiston pitkäaikaisen filosofian professorin Oiva Ketosen tieteellinen ura oli merkittävä: Hän teki uransa alussa yhden asian ja jätti sen sitten täydellisesti. Myöhempi tuotanto muodostuu kirjoitellusta, jossa tieteellisyyden oleellinen tunnusmerkki, uuden, alkuperäisen tiedon tavoittelu, ei ole määräävä.

Ketonen syntyi vuonna 1913 suureen pohjalaiseen talonpoikaisperheeseen. Kansakoulun jälkeen Ketosen opinhalu vei hänet kouluun kaupunkiin, jonne kertyi matkaa lähemmäs kolmeakymmentä kilometriä. Matka taittui pyörällä. Ketonen opiskeli matematiikkaa ja filosofiaa Helsingin yliopistossa 1930-luvulla. Matematiikkaa dominoi Rolf Nevanlinna, tunnettu funktioteorian tutkija, ja filosofiaa Eino Kaila. Kaila oli teatraalinen persoona, joka tunsii vetoa taiteelliseen ilmaisuun ja tieteelliseen ankaruuteen. Vuosisadan alkuvuosikymmeninä suuresti edistynyt fysiikka, ajan ja avaruuden suhteellisuusteoria sekä mikrokosmoksen kvanttimekaniikka kiehtoivat häntä. Hän huultavasti ajatteli, että luonnon perimmäisten salaisuuksien tutkiminen fysiikan tieteessä oli jalointa mihin ihminen pystyi. Filosofina Kaila tietyksi tunsii sen mannermaisen filosofisen suuntauksen joka nosti ylimmäksi arvoksi tuollaisen tieteellisen credon, nimittäin loogisen empirismin. Hän hakeutui sen perustajien läheisyyteen ja toi siliä

tavalla modernin loogisen tutkimuksen Suomeen. Kaila itse ei ollut mikään loogikko, vaan lähinnä tietoteoreetikko.

1930-luku oli jännittävää aikaa logiikan ja matematiikan perusteiden tutkimuksessa. Edeltävän vuosikymmenen lopulla oli saavutettu yksi-mielisyys siitä, millä tavalla sellaisia matemaattisia teorioita kuin luonnollisten lukujen  $0, 1, 2, \dots$  teoria pitää esittää formaalisesti, se on, absoluuttisella täsmällisyydellä. Pian kävi kuitenkin ilmi, ettei mitään äärellisesti esitettävää formalismia voi olla olemassa. Tämä kuuluisa Gödelin epätäydellisyystulos vei pohjan aiemmilta yrityksiltä löytää matematiikalle kestävä perusteet. Sellaisia oli yritetty kehittää saksalaisen matemaatikon David Hilbertin johtamassa ns. todistusteoreettisessa koulukunnassa.

Todistusteorian tutkimus elpyi varsin pian Gödelin tulosten vuonna 1931 aiheuttamasta shokista. Saksalainen logiikan tutkimuksen nero Gerhard Gentzen (1909–1945) näytti väitöskirjassaan vuodelta 1933 tien eteenpäin. Pari, kolme vuotta myöhemmin Gentzen onnistui antamaan vastauksen Gödelin toisen epätäydellisyysteoreeman synnyttämään tilanteeseen. Tuon teoreeman mukaan formalisoidun aritmetiikan ristiriidattomuutta ei voida osoittaa sellaisella "finitistisellä" tavalla kuin Hilbertin koulukunta oli vaatinut. Gentzenin viimeinen työ vuodelta 1943, kaksi vuotta ennen hänen traagista kuolemaansa, toidellisen selvyyden toisen epätäydellisyysteoreeman tilanteeseen.

Yllä kuvattuun maastoon sijoittuu Ketosen pro gradu -tutkielma "Todistusteorian perusaatteet" joka julkaistiin vuonna 1938 Suomen filosofisen yhdistyksen *Ajatus*-vuosikirjassa. Ketonen lähti saman vuoden syksyllä Göttingeniin jatko-opiskelijana, työskentelemään Gerhard Gentzenin ohjauksessa. Hilbertin koulukunnan kantava voima Paul Bernays oli jo joutunut lähtemään Saksasta pakoon Zürichin nelisen vuotta aikaisemmin.

Emme tiedä, mitä Ketonen oppi Gentzeniltä Göttingenissä. 1940-luvun alussa hän julkaisi pari pientä artikkelia todistusteoreettisista aiheista suomeksi *Ajatus*-vuosikirjassa. Tarkka lukeminen osoittaa, että niiden taustalla oli jo merkittäviä keksintöjä. Sitten valmistui väitöskirja *Untersuchungen zum Prädikatenkalkül* vuonna 1943, noin 70-sivuisen pieni teos. Yritän seuraavassa selostaa, mitä Ketonen sai siinä

aikaan, mutta sitä ennen tehtäköön pari huomautusta noista vaikeista ajoista.

Ketosen tarkoitus oli ollut mennä Zürichiin syksystä 1939, työskentelemään Bernaysin ohjauksessa, mutta maailmansodan alkaminen esti tämän. Väitöskirja on tehty täydellisessä yksinäisyydessä sanan intellektuaalisessa mielessä. Vastaväittäjänä toimi Lars Ahlfors. Hän oli Nevanlinnan oppilas ja yksi ensimmäisten Fields-mitalien ("matematiikan Nobel") voittajista vuonna 1936. Sodan jälkeen Ahlfors siirtyi Harvardin yliopiston professoriksi. Ketosen väitöskirjan esipuheessa kiittää Ahlforsia "arvokkaista neuvoista väitöskirjan esitysmuodon yhteydessä." Olen aika varma, että Ketonen on tässä puhtaasti asiallisen: Ahlforsilla ei ollut edellytyksiä ymmärtää Ketosen työn todellista arvoa. Sitä varten olisi tarvittu todistusteoreettisen tutkimuksen syvällistä ymmärtämistä. Siksi neuvot lienevät koskeneet tulosten esittämistä eikä löytämistä. Sisällön puolesta Ketonen kiittää vain Gentzenä, joka oli häntä vuonna 1938–39 "johdattanut tämän työn aihepiiriin."

Äärimmäisen vaikean loogisen tutkimuksen tekeminen edellyttää poikkeuksellista keskittymiskykyä. Jos sitten ei ole edes yhtä henkilöä, jonka kanssa voisi työn edistymisestä keskustella, onnistuminen lähentelee jo ihmettä. Ketonen vei työnsä loppuun, mutta tulosten esitystä voidaan luonnehtia itselle kirjoitetuksi sanalliseksi yhteenvedoksi. Oliko Ahlfors ehkä vaatinut lisää selityksiä? Tietyssä pisteessä loogis-matemaattinen tutkimus vaatii metodista etenemistä, tyyliin "Määritelmä. Teoreema. Todistus." Lukijan täytyy itsensä käydä asiat formaalisesti läpi. Verbaaliset selitykset eivät tätä korvaa.

Ketosen väitöskirja muodostuu kolmesta kappaleesta. Ensimmäiseen Gentzenin keksimä looginen kalkyyli, ns. sekvenssikalyyli, johon Ketonen tekee oleellisia parannuksia. Toisessa kappaleessa määritellään kalkyyliä tehdyille formaalisille päätelyille tietylnainen normaaliuoto. Sen tarkoituksena on tehdä mahdolliseksi päätelyiden vastakohtaa eli päätelyn mahdottomuutta koskevat tulokset. Tällaisia tuloksia tarvitaan esimerkiksi kun halutaan osoittaa päätelysääntöjen järjestelmä ristiriidattomaksi. Matemaattisen teorian aksiomien keskinäinen riippumattomuus voidaan myös osoittaa

päättelämättömyystodistusten kautta. Väitöskirjan kolmannessa kapaleessa johdetaan juuri tuollaisia tuloksia alkeisgeometrian järjestelmille. Kohokohtana on Eukleideen paralleeliaksiooman riippumattomuuden todistus muista aksioomista päättelämättömyystuloksen kautta.

Logiikan tutkimuksen johtajatuksena 1930-luvulle asti oli ollut, että tutkimuksen kohteena ovat erityiset "loogiset totuudet." Wittgensteinin *Tractatus*un sanoin, tuollaiset totuudet ovat "tautologisia," ne eivät sulje pois mitään todellista maailmaa koskevaa asiantilaa. Siksi ne eivät myöskään sano mitään tuosta maailmasta. Tätä ajatusta yleistään tultiin ideaan, että myös matemaattiset totuudet ovat "tyhjiä tautologioita." Logiikan tutkimuksen yhtenä keskeisenä ongelmana Gottlob Fregestä ja Bertrand Russellista lähtien oli ollut näyttää, miten matemaattiset totuudet voidaan johtaa kaikkein perustavimmista loogisista totuuksista. Oikeastaan voisimme tähän liittää myös George Boolean nimen, joka 1850-luvulla kehitti algebrallista logiikan teoriaa, nykyistä lauselogiikkaa, otsikon "The Laws of Thought" alla.

Gentzenin väitöskirja *Untersuchungen über das logische Schliessens* vuodelta 1933 hylkäsi täydellisesti tuon Fregen ja Russellin käsityksen, jonka myös Hilbertin koulukunta oli muunneltuna omaksunut. Logiikka on teoria aukottoman argumentoinnin rakenteesta, matemaatiikan sisällä siis aukottoman todistamisen. Sen tulosten perusmuoto on: "Jos oletukset  $A, B, C, \dots$  on tehty, niin  $D, E, F, \dots$  seuraavat." Päättelyn muoto on hypoteettinen, oletuksista johtopäätöksiin, kun taas Fregen, Russellin, ja Hilbertin logiikassa hypoteeseilla ei ollut muodollista esitystä. Tänä päivänä saattaa tuntua merkittävältä, että Boolesta ja Fregestä lähtevä logiikka ensimmäisinä vuosikymmeninä niin radikaalisti poikkesi vanhasta aristoteelisesta ideaasta, logiikasta "demonstratiivisen argumentoinnin tieteenä." Toisaalta kaikki loogikot eivät ole vieläkään omaksuneet Gentzenin loogista vallankumousta.

Gentzenä seuraten logiikan tehtävänä on huolehtia vain oletuksista johtopäätöksiin vievien askeleiden korrektiisuudesta. Itse asiassa kokotavanomainen predikaattilogiikka muotoillaan niin, ettei siinä ole edes yhtä loogista aksioomaa, vaan pelkkiä päättelysääntöjä. Yksinkertaisimmat tällaiset askeleet koskevat lauselogiikkaa, eli konnektiivien

"ja", "tai", "jos...", niin "...", ja "ei" formaalisten vastineiden logiikkaa. Konnektiivilla & muodostamme kahden annetun lauseen  $A$  ja  $B$  konjunktion  $A \& B$  ("A ja B"). Konjunktio-omaisen lauseen päättelämiseksi on riittävä, että on päätelty sen jäsenet  $A$  ja  $B$  erikseen. Jälkimmäiset ovat tämän säännön "premissit," konjunktio taas sen "johtopäätös." Vastaavasti disjunktio  $A \vee B$  ("A tai B") päättelämiseksi on riittävä, että on päätelty vähintään yksi vaihtoehdoista  $A$  ja  $B$ . Näitä riittäviä ehtoja kutsutaan Gentzenä seuraten vastaavien konnektiivien tuontisäännöiksi. Kolmas konnektiivi  $A \supset B$  ilmaisee ehtolauseen ("jos  $A$ , niin  $B$ "). Sen päättelämiseksi on riittävää olettaa  $A$  ja päätellä tästä oletuksesta  $B$ . Jos tämä ns. hypoteettinen päätelmä onnistuu, voidaan päätellä ehtolause  $A \supset B$ . Samalla väliaikainen onnistuu, voidaan päätellyn oletuksien listalta. Negaatiota "ei" oletus  $A$  poistetaan päättelyn oletuksien listalta. Negaatiota "ei" voidaan käsitellä parilla eri tavalla jotka sivuutamme tässä.

Gentzen antoi toiseksi eri muotoja oleville lauseille käänteiset poistosäännöt. Kun tuontisäännöt antavat riittävät ehdot annettua muotoa olevan lauseen päättelämiseksi, poistosäännöt antavat välttämättömät ehdot noille lauseille. Ne siis lausuvat, mitä annettua muotoa olevasta lauseesta välttömästi seuraa. Konjunktion  $A \& B$  välttömät seuraukset ovat  $A$  ja  $B$  erikseen. Ehtolauseesta  $A \supset B$  seuraa, kun myös ehto  $A$  on päätelty, lause  $B$ . Disjunktio sääntö on monimutkaisempi ja jätämme sen tässä sivuun.

Olkkoon nyt annettuina oletukset  $A, B, \dots, C$  ja väitetty johtopäätös  $D$ . Gentzenin tuontisääntöjen avulla yritämme analysoida pääteltävän lauseen  $D$  osiin jotka riittävät  $D$ :n päättelämiseksi. Poistosääntöjen avulla taas yritämme analysoida oletuksia  $A, B, \dots, C$ . Jos kaikki käy hyvin, molemmat analyysit kohtaavat. Analyysin helpottamiseksi Gentzen kehitti täsmällisemmän loogisen kalkyylin, edellä jo mainitun sekvenssikalkyylin, ja näytti, että lauseloogiset päättelet voidaan aina tehdä analysoimalla oletuksia ja johtopäätöstä osiin. Päättelyn onnistumiseksi ei tarvitse ottaa käyttöön mitään, mikä ei jo puolevästi sisälly oletuksiin ja johtopäätökseen. Sanotaan nyt vaikka, että annetuista lähtökohdista maaliin pääseminen voi yleensä elämässä vaatia yllättäviä kiertoteitä, mutta puhtaassa logiikassa sellaisia ei Gentzenin

mukaan tarvita. Tämä tulos on nimeltään Gentzenin päälause, tai "leikkausten eliminoimisteoreema."

Gentzen ei onnistunut ihan täydellisesti analyttisen loogisen kalkyylin kehittämisessä. Ketosen väitöskirjan ensimmäinen kappale vie tämän perille: Ketonen keksi, että lauselogiikan päättelysäännöt voidaan muotoilla "invertibelisti." Tämä sääntöjen ominaisuus on seuraava: Jos johtopäätöksen muoto on sellainen, että se voisi olla tietyn säännön avulla päätelty ja jos tuo johtopäätös on todella pääteltävissä, säännöstä ilmenevät premissit ovat myös pääteltävissä. Sääntöjen luonteeseen kuuluu, että johtopäätös seuraa premissistä. Ketonen näytti, että lauselogiikka voidaan muotoilla niin, että käänteen pätee: Johtopäätös voidaan korvata sen kanssa *yhtäpitäivillä* premissillä. Lauselogiikan tapauksessa nämä premissit ovat, sanoikaamme, "yhtä askelta yksinkertaisempia" kuin johtopäätös. Siksi johtopäätöstä  $D$  ja oletuksia  $A, B, \dots, C$  analysoivat askeleet vievät lopulta yhtäpitävään tilanteeseen, jossa mitään analysoitavaa ei ole jäljellä. Jos  $D$  todella on pääteltävissä oletuksista  $A, B, \dots, C$ , tilanne on muotoa:  $E$  on pääteltävissä oletuksesta  $E$ ,  $F$  on pääteltävissä oletuksesta  $F, \dots$  missä  $E, F, \dots$  ovat yksinkertaisimpia, analysoimattomia oletusten  $A, B, \dots, C$  ja johtopäätöksen  $D$  osia. Päinvastaisessa tapauksessa törmäämme aina-kin yhteen tilanteeseen jossa olisi tehtävä päätteily oletuksesta  $E$  johtopäätökseen  $F$ . Kun näillä ei ole mitään loogista muotoa, niillä ei myöskään voi olla mitään päätteilyyysyhteyttä. Siksi alkuperäinen päätteilytehtävä  $D$ :hen oletuksista  $A, B, \dots, C$  ei voi koskaan onnistua.

Ketosen kalkyylin sivutuotteena saadaan kaunis todistus lauselogiikan täydellisyydelle ja mekaaninen menetelmä päätteilyiden etsimiseksi. Voimme pitää Ketosen analyttista kalkyyliä Leibnizin ja muiden unelmien täyttymyksenä lauselogiikan rajoitetussa maailmassa.

Lauselogiikkaa paljon monimutkaisempi on kvanttorien "kaikki" ja "on olemassa" yhdessä lauselogiikan kanssa muodostama predikaattilogiikka. Gentzen oli näyttänyt, että lauselogiset päättelyaskeleet voidaan erottaa kvanttorien päättelyaskeleista. Jälkimmäisissä on aina vain yksi premissi, edellisissä yksi tai kaksi. Konnektiivien ja kvanttorien päättelyaskeleiden erottaminen voidaan visualisoida niin, että päätteily muodostavat puun jonka runkona on, päätteilyn lopusta eli

puun juuresta katsoen, ensin kvanttoriaseleita, sitten lauselogisten askeleiden muodostama latvaosa jossa puu voi haarautua. Välissä on tietty päätteilyttä ilmaiseva ns. "keskisekvenssi." Ketonen paransi Gentzenin tulosta näyttämällä, miten kvanttoriopäätteilyaskeleiden lukumäärä voidaan minimoida: kvanttoriaosa on silloin mahdollisimman yksinkertainen. Tällaisen päätteilyn hän sanoo olevan normaalin muodossa. Ketosen analyttinen menetelmä mekanisoi lauselogisen päätteilyn, mutta vuodesta 1936 tiedettiin, Alonzo Churchin kuuluisan tuloksen perusteella, että päätteilyn löytämistä predikaattilogiikassa ei voida samalla tavalla mekanisoida. Ketosen kiinnostuksen kohde oli kuitenkin ensi sijassa päättelemättömyys. Ideaa yksinkertaisimmasta mahdollisesta päätteilystä voidaan Ketosta seuraten soveltaa seuraavasti: Oletetaan, että väitetty päätteily  $D$ :hen oletuksista  $A, B, \dots, C$  on mahdollinen. Silloin on olemassa yksinkertaisin mahdollinen päätteily normaalimuodossa. Tutkimalla oletuksia ja väitettyä johtopäätöstä voidaan määrätä mekaanisesti periaatteessa rajoittamaton sarja mahdollisia keskisekvenssejä  $M_1, M_2, M_3, \dots$ . Jos väitetty päätteily on mahdollinen, on olemassa joku  $n$  siten että  $M_n$  on päätteilyn keskisekvenssi. Se voidaan johtaa mekaanisesti suoritettavilla lauselogisilla askeleilla. Kokonaismenetelmä ei kuitenkaan ole mekaaninen: Kunkin keskisekvenssin  $M_1, M_2, M_3, \dots$  päätteilyvyys voidaan tarkastaa, mutta mikään äärellinen määrä negatiivisia vastauksia ei takaa, etteikö tulevaisuudessa voisi löytyä päätteilyä keskisekvenssiä. Ketonen pyrki löytämään tilanteita, joissa voidaan asettaa yläraja mahdollisten keskisekvenssien lukumäärälle. Yksinkertaisimmassa tapauksessa hän osoittaa, että jos jollekin  $n$  keskisekvenssi  $M_n$  on päätteilyssä, jo  $M_1$  on päätteilyssä.  $M_1$  ei kuitenkaan ole päätteilyssä, eikä siksi mikään  $M_n$ . Niin kuin todettiin, menetelmä ei ole yleispätevä, mutta sitä voidaan soveltaa monissa yksittäistapauksissa, usein monimutkaisten valmiste-lujen jälkeen.

Ketosen varsinainen kohde oli soveltaa puhtaan logiikan parissa kehitettyjä analyysimenetelmiä matemaatikassa. Matematiikan perustutkimuksen keskeiset ongelmat ovat: teorioiden esittäminen aksiomaattisina formaalisina järjestelminä, näiden ristiriidattomuuden ja aksiomien keskinäisen riippumattomuuden todistaminen, kysymys

järjestelmien täydellisyydestä, ja viimeisenä kysymys ratkaisumenetelmän olemassaolosta. Viimeinen voidaan vielä rajoittaa koskemaan sopivan yksinkertaista muotoa olevia lauseita. Kun keskeiset ongelmat muotoillaan todistusteorian termein, päättelyiden mahdollomuutta koskevat tulokset nousevat esille.

Väitöskirjan kolmannessa kappaleessa Ketonen soveltaa kehittämäänsä menetelmiä alkeisgeometriaan. Suuri edeltäjä on norjalainen Thoralf Skolem (1887–1963). Eräässä unohtuneessa työssään vuodelta 1920 Skolem oli kehittänyt menetelmiä päättelyjen mahdolltomuustodistuksille. Hän oli soveltanut niitä hilateoriaan ja projektiiviseen tasogeometriaan. Edellistä voidaan yleisin termein luonnehtia Boolean aloittaman algebralaisen loogisen tradition nykyaikaisena muotona. Hila on matemaattinen rakenne, joka vastaa suunnilleen konnektiivien ”ja” ja ”tai” logiikkaa. Hilarakenne syntyy myös, jos tarkastellaan Dedekindin tavoin kahden luonnollisen luvun suurinta yhteistä jakajaa ja pienintä yhteistä jaettavaa. Edelleen hilaihin törmätään kun tutkitaan topologisten avaruuksien ns. avoimien joukkojen algebralista rakennetta. Skolem oli siis kehittänyt todistusteoreettisia menetelmiä hilateoriaa varten jo kauan ennen Gentzenin aikaa. Keskeisenä tulokseen oli, että jos väitteeseen ei kuulu eksistensikkvantoreita, sen pääteltävyyttä hilateoriassa ja projektiivisessä geometriassa voidaan ratkaista mekaanisesti. Skolemin ratkaisumenetelmä hilateorialle on vielä ns. polynomiaikainen algoritmi. Eräät amerikkalaiset tutkijat olivat löytäneet yhtä tehokkaita algoritmeja 1980-luvun lopulla, vuosikymmenien kehityksen jälkeen. Oli suuri shokki kun heille vuonna 1992 paljastui, että Skolem oli pystynyt samaan täysin yksin seitsemänkymmentä vuotta aikaisemmin. Mikä on tilanne projektiivisessä geometriassa, sitä en osaa sanoa.

Ketonen muotoilee ensin Skolemin tarkasteleman geometrian aksioomajärjestelmän Gentzenin sekvenssikalyylin termein. Hän antaa toisessa kappaleessa kehittämällään menetelmällä projektiivisen geometrian ristiriidattomuustodistuksen, sitten Skolemin ratkaisumenetelmää vastaavan tuloksen. Seuraavaksi tarkastelu laajennetaan affiiniin tasogeometriaan jossa Eukleideen paralleeliaksioma voidaan ilmaista. Siinä on projektiivisen geometrian yhdyssuorien ja leikkaus-

pisteiden lisäksi myös annettujen suorien paralleelit annettujen pisteiden kautta. Ketosen työ huipentuu sen näyttämiseen, että mikään päättely ei voi johtaa paralleeliaksiomaan kun muut affiinin geometrian aksioomat sallitaan oletuksina.

Ketonen päätyy suuren vaivan jälkeen tulokseen, joka tunnettiin jo yli sata vuotta ennen, ns. epäeuklidisten geometrioiden keksimisen aikana. Mikä edistys asiaan sisältyy, siitä esitettävään pari huomautusta. Kaikkien mahdollisten päättelyiden rakenteen tunteminen (normaalimuotoisten, muista meidän ei tarvitse välittää) alkeisgeometriassa, matemaattisista tieteistä vanhimmassa, on itsessään tärkeää. Sivutuotteenä saadaan mm. ratkaisumenetelmiä yksinkertaisimpiin tapauksiin, esim. puhtaasti universaalisiiin lauseisiin. Toiseksi, epäeuklidiset geometriat antavat malleja, joissa muut aksioomat paitsi paralleeliaksioma pätevät. Nämä mallit käyttävät reaaliilukuja, mutta reaaliilukujen aritmetiikan todistusteoreettinen tutkimus ei ole toistaiseksi johtanut niiden perusteelliseen ymmärtämiseen. Ketosen riippumattomuustodistukset perustuvat paljon heikompiin oletuksiin kuin mitä reaaliilukujen teoriassa tarvitaan. Ne korostavat ”metodien puhtautta,” joilla todistusteoriassa analysoidaan aksiomaattisia järjestelmiä.

Ketosen onni oli, että neutraalissa Sveitsissä asuva Paul Bernays kirjoitti arvioita eurooppalaisista logiikan töistä sen ajan ainoaan logiikan lehteen, USA:ssa ilmestyvään *The Journal of Symbolic Logic*iin. Tiedonvälitys ei ollut aukoton: Olen esimerkiksi nähnyt kirjeen, jonka Bernays lähetti Georg Henrik von Wrightille ja jossa lukee, että jälkimmäisen kirjoittamat arviot lehteen ovat tuhoutuneet koska niitä kuljettanut postin kone joutui ilmahyökkäyksen kohteeksi.

Bernays kirjoitti pitkän arvion Ketosen väitöskirjasta *JSL*:n joulukuun 1945 numeroon. Siinä selvitetään ensin Ketosen tekemät muutokset Gentzenin kalkyyliin. Uudet säännöt ovat hyvin esillä arvion ensimmäisellä sivulla. Niiden inverttiibeliys käydään huolellisesti läpi, samoin kuin tämän ominaisuuden keskeiset seuraukset. Toisen kappaleen uutuus, keskisekvenssien jonon määrittely normaalimuotoisille päättelyille tulee myös esiin, mutta ei ihan optimaalisesti. Bernays esittää, että pääteltävyydestä ylipäänsä seuraa jonkun keskisekvenssin

$M_n$  pääteltävyys samoin kuin kaikkien sitä seuraavien sekvenssien  $M_{m'}$  missä  $m$  on suurempi kuin  $n$ . Ketosen määrittelemät keskisekvenssit ovat yleisimpiä mahdollisia seuraavassa mielessä: Aina kun joku keskisekvenssi on pääteltävissä, ei välttämättä Ketosen määritelmän mukainen, myös joku Ketonen-keskisekvenssi on pääteltävissä. Nämä yleisimmät mahdolliset keskisekvenssit ovat heikoimpia mahdollisia pääteltävyyden suhteen. Mihin sitten tarvitsemme niitä? Ketosen määränä olivat päättelemättömyystulokset. Jos joku keskisekvenssi on pääteltävissä, joku Ketosen määrittelemä keskisekvenssi  $M_n$  on pääteltävissä. Kääntäen, jos mikään Ketosen keskisekvenssi ei ole pääteltävissä, seuraa, ettei mikään keskisekvenssi ole pääteltävissä, eikä mitään päätteleyä ylipäätensä voi olla olemassa. Ketosen heikoimmat mahdolliset keskisekvenssit palvelevat juuri tätä päämäärää, mutta tämä metodisesti keskeinen huomautus on vain epäsuorasti luettavissa Bernaysin arviosta.

Ketosen normaaliuotoisten päättelyiden keskisekvenssien avulla voidaan parantaa hiukan tunnettua Gödelin tulosta predikaattilogiikan täydellisyydestä. Ketonen on selostanut asian yleisin termein suomenkielisessä artikkelissa joka ilmestyi *Ajatus*-vuosikirjassa vuonna 1941. Tuloksesta on maininta Manfred Szabon toimittaman Gentzenin koottujen töiden esipuheessa vuodelta 1969. Gödelin tuloksen mukaan jokainen predikaattilogiikan lause on joko pääteltävissä, tai sitten on mahdotonta, ettei sille ole kumoavaa vastaesimerkkiä. Ketosen parannus on, että jälkimmäinen voidaan korvata suoralla kumoamisella. Keskisekvenssin systemaattinen etsiminen antaa mahdollisuuden määrittellä kumoava vastamalli suoraan. Ketonen kertoi minulle, että hänen opiskelutoverinsa Max Söderman tunki Gödelin 1930-luvun loppupuolella Wienissä ja selosti Ketosen tuloksen tälle. Jälkimmäinen myönsi, että täydellisyytulos Ketosen tavalla on hieman vahvempi. Tarinasta voimme päätellä, että Ketosella oli uusia merkittäviä tuloksia jo ennen sotien alkua.

Bernaysin arviossa tarkastellaan seuraavaksi päättelemättömyystodistusten soveltamista geometriaan. Tässä vaiheessa, vuonna 1945, Bernays on lukenut tarkkaan Skolemin työn vuodelta 1920. Hän mainitsee sen keskeisiä tuloksia ja miten Ketonen laajentaa niitä

affiiniin tasogeometriaan. Kuitenkin hän sanoo, että "kaikki nämä kolmannen kappaleen todistelut, joiden tarkoituksena on osoittaa Ketosen metodien tehokkuus... ovat varsin monimutkaisia ja vaativat työteliäitä selityksiä." Seuraavaksi väitetään, että Ketosen tarkastelut voidaan korvata yksinkertaisemmilla, sellaisilla joita arvioija itse on esittänyt kirjassa *Grundlagen der Mathematik* (toinen osa vuodelta 1939). Nämä arviot koskevat Ketosen päättelemättömyystuloksia. Lopussa Bernays arvelee, että Ketosen menetelmät ovat ehkä parhaat silloin kun kysymyksessä on todistuvien lauseiden päättelyjen etsiminen.

Ainakin kaksi amerikkalaista loogikkoa luki huolellisesti Bernaysin arvon: Haskell B. Curry otti käyttöön Ketosen kalkyylin, ensin pikku kirjassa vuodelta 1950, sitten oppikirjassa *Foundations of Mathematical Logic* vuodelta 1963. Hän oli myös kiinnostunut Ketosen täydellisyystodistuksesta predikaattilogiikalle. Curryn kappaleessa Ketosen väitöskirjaa on tämän suuntaisia reunamerkintöjä. (Tieto on peräisin Jonathan Seldimiltä.) Curry piti Ketosen väitöskirjaa parhaana työnä todistusteoriasta Gentzenin töiden jälkeen.

Stephen Kleenen paljon luettu *Introduction to Metamathematics* vuodelta 1952 käyttää osaksi Ketosen loogista kalkyyliä, jonka Kleene tunki vain Bernaysin arvon kautta.

Toinen arvio Ketosen työstä ilmestyi lehdessä *Mathematical Reviews* vuonna 1948. Kirjoittaja oli hollantilainen intuitionistisen logiikan kehittäjänä tunnettu Arend Heyting. Se on lyhyt yhteenvedo, jossa mainitaan Ketosen johtavan riippumattomuustuloksia alkeisgeometriassa Gentzenin tyyppiselle logiikan formalisoimille määritellyn normaaliuudon kautta.

Varhaisin viittaus Ketosen väitöskirjaan taitaa olla Karl Popperin artikkelissa "New foundations for logic" vuodelta 1947. Siinä kehitellään teoriaa loogisesta päättelystä, jossa on piirteitä Gentzenin ja Ketosen kalkyyleista.

Tämän päivän näkökulmasta Ketosen työn merkitys on selvästi kasvanut. Tietojenkäsittelytieteen kehitys on johtanut järjestelmiin, jotka etsivät todistuksia automaattisesti. On kehitetty sekvenssikalkyyleita, jotka soveltuvat erityisesti tähän. Troelstran ja Schwichtenbergin kirjasta *Basic Proof Theory* (Cambridge 1996) pystymme lukemaan

jatkuvan kehityslinjan Gentzenistä Ketosen, Kleenen, Curryn, ja Schütten kautta Dragalinin työhön vuodelta 1978, ja mainittuun Troelstraan. Kaikki nämä ovat vaikuttaneet oleellisesti ns. "kontrak-tiovapaiden" sekvenssikalkyylien kehittämiseen. Nämä kalkyyliit ovat nykyisen strukturaalisen todistusanalyysin keskeisiä välineitä. Näitä käyttävät tutkijat eivät tietenkään aina tarkkaan tiedä, minkälainen historiallinen kehitys niiden takana on.

Ketosen kunnianhimoinen päämäärä oli soveltaa logiikan todistus-teoreettisia menetelmiä matemaattisiin järjestelmiin. Bernaysin mukaan hänen oma "yleinen konsistenssiteoreemansa" palvelee tätä tarkoitusta paremmin kuin Ketosen metodit, mutta tämä ei ole toteutunut. Ketosen ensimmäinen yritys jäi täydellisesti unohtuksi täsmälleen kuten Skolemin kaksikymmentäneljä vuotta aikaisemmin. Troelstra mainitsee kirjassaan Ketosen väitöskirjan edelläkävijänä sekvenssi-kalkyylin soveltamisessa aksiomaattisiin järjestelmiin. Kirjan *Basic Proof Theory* toisessa laitoksessa (2000) selostetaan uudenlaista lähestymis-tapaa tällaiseen soveltamiseen, missä aksiomat käännetään samanlai-siksi päättelysäännöiksi kuin itse sekvenssikalkyylin loogiset säännöt. Näyttäisi, että todistusanalyysin soveltaminen matemaatikassa tulee selvästi yksinkertaisemmaksi kun näin menetellään.

Ketosen väitöskirjassa todetaan muutaman aiheen kohdalla, että kirjoittaja suunnittelee tarkempien tutkimusten julkaisemista niistä. Siitä ei kuitenkaan tullut mitään, ja tulemme lopuksi kysymykseen, miksi Ketonen ei koskaan jatkanut loogisia tutkimuksiaan. Hänen saavutuksensa todellista merkitystä ei kukaan Suomessa voinut täysin nähdä. Bernaysin arvion kautta Ketosen looginen kalkyyli tuli tunne-tuksi, mutta muut osat jäivät myös kansainvälisesti unohtuksiin. Gentzen olisi ollut Ketoselle ideaalinen lukija, mitä koskee predikaatti-loogisten päättelyiden normaalimuotoa, keskisekvenssien määrittelyä, ja niiden soveltamista matemaatikassa. Gentzen oli kuitenkin kärsinyt elokuussa 1945 nälkäkuoleman, eikä ole merkkiä siitä, että hän olisi edes nähnyt Ketosen väitöskirjaa (ks. Menzler-Trott, *Gentzens Problem: mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland*, 2001). Ketonen itse oli varmasti tietoinen saavutuksensa merkityksestä. Työstä näkyy hillitty innostus, jolla Gentzenin analyysimenetelmiä halutaan laajentaa

puhtaasta logiikasta matemaatiikkaan, ja vakaumus, että nämä menetel-mät tuottavat ne parhaimmat tulokset. Yhdellä Suomessa sodan aikana ilmestyneellä työllä ei saa tarvittavaa näkyvyyttä: Olisi tarvittu enemmän kärsivällisyyttä, jatkotöitä ja todistusanalyysien soveltamista uusille matemaatiikan alueille.

Matemaattikkona Ketosella oli luultavasti vain vähäiset mahdollii-suudet hankkia itselleen pysyvä paikka yliopistossa. Logiikka ja perustetutkimus matemaatiikan haarana olivat luksusta, joihin isoilla mailla oli varaa. Toisaalta modernin logiikan tutkimus oli Kailan vaikutuksesta vakiintunut myös osaksi filosofiaa. Logiikan tutkimuk-sen sijasta Ketonen kirjoitti teoksen *Suuri maailmanjärjestys* (1948), filosofoivan kirjan maailmankuvan kehityksestä. Se on hyvin kirjoitettu niin kuin suurin osa Ketosen tuotannosta, mutta sitä ei voida kuiten-kaan pitää varsinaisena tieteellisenä, uuteen tietoon tähtäävänä tutkimuksena.

Kun Kaila siirtyi akateemikoksi, Ketonen haki vapaaksi jäänyttä teoreettisen filosofian professuuria. Keskusteltiin, voiko matemaatikos-ta sellaista tulla, ja mitä vaaroja tähän voisi sisältyä. Ketosesta tuli filosofian professori, mutta nerokas todistusteoreetikko katosi. Ketonen toimi opettajana ja tiedepolitiikassa aina huipulla asti, ministeriön korkeakouluosaston johtajana. Samaan aikaan suomalainen filosofia kukoisti von Wrightin, hänen oppilaansa Jaakko Hintikan ja Erik Steniusken töiden kautta.

Myöhempinä vuosinaan Ketonen selitti joskus jättäneensä logiikan tutkimuksen "pänsäryn" vuoksi. Käytännöllistä syytä, nimittäin sopivaan virkaan pätevoitymistä, ei ollut: hän olisi nimityksen jälkeen voinut vapaasti jatkaa todistusteoreettisia töitään. Voimme spekuloida psykologisilla selityksillä: On poikkeuksellista tehdä täysin yksin äärimmäisen vaikeita loogisia tutkimuksia sotien keskellä. Viime mainittu pätee aivan kirjaimellisesti: Ketonen kertoi kerran kirjoit-taneensa väitöskirjaa Äänisjärven rantatöyräillä, syvällä sen ajan Neuvostoliitossa. Oliko yksityisen loogisen maailman luominen pakoa todellisuudesta? Keskittyminen tuollaisissa oloissa vaatii syvältä tulevaa motiivia. Hävisikö se rauhan ja arkielämään palaamisen myötä? Ketosen eläkevuosien yksi harrastus oli ihmismielen, sen

häiriöiden ja niitä parantavan psykoterapian kysymysten pohtiminen. Ehkäpä häntä olisivat huvittaneet edellä esitetyt arvelut.

*Helsingin yliopisto*

## Leibnizin universaalikieli- ja kalkyyliateiden vastaanotto 1900-luvulla<sup>1</sup>

RISTO VILKKO

Tämän kirjoitukseni voidaan katsoa täydentävän tai jatkavan välittömästi Panu Raatikaisen toimittamassa *Universaalikieli*-kirjassa kaksi vuotta sitten julkaistua esitelmääni "Leibnizin perinteen jatkajat 1800-luvulla" (2000). Tarkastelin siinä pääpiirteittäin, miten Leibnizin unelma yhtenäistieteestä ja sen universaalikielestä välittyi 1700-luvulle ja kuinka se löydettiin uudelleen 1800-luvun puolivälin tuntumassa logikkaa ja filosofiaa koskeneiden kiistojen yhteydessä. Selvittääkseni mitkä olivat hänen universaalikieliohjelmansa ne piirteet, jotka erityisesti kiinnostivat 1800-luvun saksalaisia ja englantilaisia filosofia ja matemaatikkoja, kiinnitin jonkin verran huomiota myös tämän ohjelman perusrakenteeseen sekä sen keskeisimpien termien, kuten "scientia generalis" ja "mathesis universalis", merkityksiin.

Tässä kirjoituksessani siirryn filosofian ja matematiikan historiassa jonkin verran ajassa eteenpäin ja tarkastelen sitä, millaisia sekä historiallisesti että systemaattisesti motivoituneita hankkeita Leibnizin ajatukset universaalikielestä ja yleiskalkyylistä innoittivat 1900-luvulla.

Universaalikielen mahdollisuus on aina kiehtonut ihmisiä. Yksi kaikkein maineikkaimmista ja samalla vaikutusvaltaisimmista univertsaalikielihankeista oli Gottfried Wilhelm Leibnizin (1646–1716) haave ajattelun yleisestä kielestä *lingua universalis*, josta hän käytti myös sellaisia nimiä kuin *characteristica universalis* ja *lingua rationalis*. Leibnizin jälkeen univertsaalikieltä tavoittelivat muiden muassa Emanuel Swedenborg, Robert Graßmann, Ernst Schröder ja Gottlob Frege.

<sup>1</sup> Esitelmä Suomen Filosofisen Yhdistyksen kuukausikokouksessa 26.9.2001.